Данная серия методичек посвящается лучшему семинаристу по электроду
рассказчику баек
и программы мехмата и НМУ
стильно и модно одетому, всегда и везде
и улыбчивому, как Степаньянц и Страупе
дающему позитивное настроение на весь семинар… да не, на всю неделю

Семинарист: (назначает вторую кр на 14 декабря)
Семинарист спустя 10 мин: А вы знали, что 14 декабря – отличный день для действий? Это ближайший экадаш. Не знаете? (пишет на доске «экадаши») Согласно индусскому календарю, это дни, когда вам будет благоволить удача. Но 14 декабря будет даже не просто экадаш, но «гита-джаянти» (пишет это на доске). Это двойная удача значит!

Ну какой ещё семинарист будет проводить к/р в дни двойной удачи? Огромное ему за это спасибо!

14.1. При какой энергии частицы, имеющей массу покоя m, время ее распада в N раз больше, чем в собственной системе отсчета?

Когда нам на ядерке давали времена жизни частиц, нам давали времена их жизни в собственных системах отсчёта. А если мы будем наблюдать за ними из быстродвижущихся СК, то время их жизни будет больше.
Согласно преобразования Лоренца

$$t_{набл} = \frac{t_{собств}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

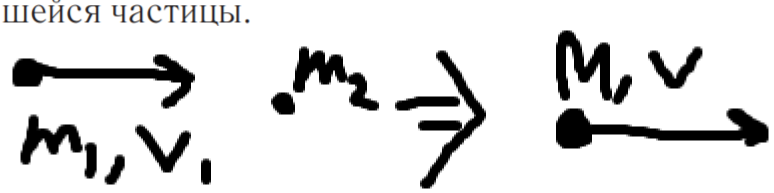
Это мы найдём бету, а оттуда скорость. От нас спрашивают энергию. Её также легко найдём: в системе частицы она mc^2, а в системе наблюдателя, согласно преобразованиям Лоренца, применённым к 4-вектору энергии-импульса

$$E_{набл} = \frac{E_{собс}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Из $t_{набл} = \frac{t_{собств}}{\sqrt{1-\beta^2}}$ следует, что $N = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Значит, и

$$E_{набл} = Nmc^2.$$

14.2. Частица с массой m_1 и скоростью v_1 поглощается частицей массы m_2, первоначально покоившейся. Найти массу M и скорость V образовавшейся частицы.



Подобные задачи можно решать двумя способами: с помощью закона сохранения 4-энергии-импульса в любой СК (очевидно, лучше всего в лабораторной) или с помощью инвариантов.

Обсудим первый способ. Пишем, как в девятом классе

$$E_1+E_2=E$$

$$p_1+p_2=p$$

Только теперь не p=mv и E=mv^2/2! Нужно использовать релятивистские формулы

$$p=\gamma m v;\quad E=\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$$

Здесь будет уместно сделать замечание. 4-импульс равен массе * 4-скорость. Никакой лямбды нет. Есть ли тут некое противоречие с тем, что я только что написал?

Дело в том, что если в 4-импульсе первая, вторая и третья компонента действительно образуют 3-импульс, то в 4-скорости первая, вторая и третья компонента образуют 3-скорость, домноженную на лямбду. Т.е. лямбда как бы «вшита» в определение 4-скорости (или, что ещё точнее, это поганая неинвариантная 3-скорость получается делением последних трёх компонент 4-скорости на лямбду). Так что никакого противоречия нет.

Далее рассматривать этот способ не имеет смысла, просто подставить и решить систему уравнений.

А что есть способ через инварианты? Там мы вместо привычного закона сохранения 4-энергии-импульса считаем его ПКН. И эта штука мало того, что сохраняется, так и одинакова во всех СК. Как правило, до столкновения ПКН надо считать в ЛСК, а после – в СЦМ новых частиц.

Тогда до столкновения 4-энергия была

$$\{E_1, \bar{p}_1 c\} + \{m_2c^2, \bar{0}\} = \{E_1+m_2c^2, \bar{p}_1 c\}$$

ПКН будет

$$(E_1+m_2c^2)^2-p_1^2c^2$$

А после столкновения ПКН очень удобно считать в системе единственной новой частицы. Дело в том, что она там покоится ☺ импульс нулевой, энергия только покоя. Поэтому там 4-энергия будет иметь тривиальнейший вид $\{Mc^2, \vec{0}\}$

с ПКН

$$M^2c^4$$

Приравниваем два ПКН

$$(E_1+m_2c^2)^2-p_1^2c^2=M^2c^4$$

Подставляем E1 и p1 через скорость v1, получаем ответ.

Какой способ лучше? В первом способе система из двух уравнений относительно M и V (массы и скорости новой частицы), во втором способе одно уравнение относительно M. Если с нас спрашивают только массу новой частицы, то второй способ будет быстрее. Если массу и скорость (как в 14.2) – первый способ будет предпочтительнее.

14.6. Частица с массой m_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2. Происходит реакция, в которой рождаются частицы с общей массой $M > m_1 + m_2$. Найти энергетический порог реакции T, т.е. минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы, начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

Решаем через инварианты: давайте подсчитаем псевдоквадрат нормы 4-импульса-энергии до столкновения в ЛСК, а после в СЦМ (как я и говорил). Почему именно так? Потому что в ЛСК мы знаем все начальные данные: 4-импульс 1-й и 2-й частиц

$$\left\{\frac{E_1}{c}, \vec{p}_1\right\}, \quad \{m_2c, \vec{0}\}$$

В частности, искомая величина

$$W_k = E_1 - m_1c^2$$

А после столкновения нам очень удобно считать ПКН в системе центра масс, потому что там будет одна частица с нулевым импульсом ☺ и энергией, равной энергии покоя. Собственно, это будет $[Mc^2]^2$ (это ПКН 4-энергии) или $(Mc)^2$ (это ПКН 4-импульса).

$$\left\{\frac{E_1}{c} + m_2 c, p_1\right\}^2 = (Mc)^2$$

Распишем псевдоквадрат нормы:

$$\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c\right)^2 - p_1^2 = (Mc)^2$$

Давайте избавимся от p_2, вспомнив, что $(m_1c)^2=(E_1/c)^2-p_1^2$ (связь энергии и импульса одной частицы в СТО, аналог $E=p^2/2m$ у Галилея, как выводится? И то, и то – ПКН 4-импульса, слева – в СК частицы, справа – в любой другой).

$$\left(\frac{E_1}{c} + m_2 c\right)^2 - \left(\frac{E_1}{c}\right)^2 + (m_1 c)^2 = (Mc)^2$$

$$2E_1 m_2 c + (m_2 c)^2 + (m_1 c)^2 = (Mc)^2$$

$$E_1 = \frac{(M^2 - m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m_2}$$

Если из этого мы ещё вычтем энергию покоя, то получим ответ:

$$\frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)c^2}{2m_2}$$

Среди всех частиц есть одна особенная – фотон. У неё энергия покоя – ноль.

$$E^2 - p^2c^2 = \cancel{m^2c^4} = 0$$

И откуда E=pc. Это очень простая формула. Поэтому с фотонами, как правило, решаются проще.

Т.к. 4-энергия имеет вид {E, **p**c}, то подставив туда p=E/c для фотона, получим, что 4-энергия фотона имеет очень простой вид {E, **E**}, Порешаем задачи с фотонами.

14.9. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, показать, что невозможны ни испускание, ни поглощение фотона свободным электроном.
И не только электроном, но и любой частицей.
Будем решать задачу через инварианты. Сперва электрон покоился и на него налетел фотон. Записываем 4-энергию системы:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{фотон}}}{\{E, \vec{E}\}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{электрон}}}{\{m_e c^2, \vec{0}\}} = \{E + m_e c^2, \vec{E}\}$$

Считаем ПКН:

$$(E + m_e c^2)^2 - E^2 = 2 m_e c^2 E + m_e^2 c^4$$

А теперь считаем ПКН после поглощения фотона. В какой СК? Разумеется, в СК электрона, где он покоится. Там 4-энергия будет $\{m_e c^2, \mathbf{0}\}$ с ПКН $m_e^2 c^4$. Сравниваем ПКН до и после. Нам приходится сделать вывод о том, что 2 $m_e c^2 E$ – это ноль. Масса электрона не ноль, скорость света не ноль, ну и фотон не может иметь нулевую энергию. Искомое противоречие.

Интересно, что про два фотона, летящих неколлинеарно, можно в некотором роде сказать, что система двух фотонов массой уже обладает.
Этому посвящена задача 14.11:

14.11. Найти массу системы, состоящей из двух фотонов одинаковой частоты ω, если угол между их волновыми векторами равен θ.
Что такое масса? Это вот такая штука

$$\frac{1}{c^2}\sqrt{E^2 - p^2 c^2}$$

Надо подсчитать суммарную энергию и суммарный импульс. Суммарная энергия вот такая вот $(p_1 + p_2)c$, суммарный импульс вот такой вот $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$.
Подставляем:

$$\frac{1}{c^2}\sqrt{E^2-p^2c^2} = \frac{1}{c^2}\sqrt{c^2(p_1+p_2)^2 - c^2(\vec{p}_1+\vec{p}_2)^2} =$$

$$= \frac{1}{c}\sqrt{2p_1p_2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2} = \frac{1}{c}\sqrt{2p_1p_2(1-\cos\theta)}$$

Если cos θ = 1 (θ=0), то масса системы ноль, а вот во всех остальных случаях как раз не ноль.

Осталось подставить p1 и p2 через ω. Это $\frac{\hbar\omega}{c}$ и он одинаковых у обоих фотонов. Получаем ответ:

$$\frac{\hbar\omega}{c^2}\sqrt{2(1-\cos\theta)}$$

И в заключение совсем простая задача.

14.9а. Опираясь на законы сохранения энергии и импульса, показать, что невозможны ни превращение свободно движущегося π^0-мезона в один гамма-квант, ни обратная реакция.

Скажу больше: превращение одной частицы в другую возможно лишь в том случае, если у них одинаковая масса.

Напомню, что масса – это $\frac{1}{c^2}\sqrt{E^2-p^2c^2}$. Энергия начальной и конечной частицы одинакова (ЗСЭ). И импульс тоже (ЗСИ). Значит, должна быть одинаковой масса по формуле выше. А у она у пиона и фотона, разумеется, разная. Ч.т.д.

Поздравляю всех, кто дочитал! Вы молодцы! Шишанин молодец!
В Высшем техническом училище (Политехникуме) в Цюрихе в 1895-1900 годах учился один студент немецкого происхождения. Совсем скоро он предложит мозгиотрывающую теорию, которая заставить физиков забыть об эфире. Ну и о сне тоже. Этим студентом был… сами знаете ☺
Кто знает, может и вы придумаете какую-то лютую дичь, которой будут мучить студентов на энном курсе?